PEMBAHASAN
OLIMPIADE SAINS NASIONAL TINGKAT KABUPATEN TAHUN 2022
BIDANG MATEMATIKA SMA

Tamurih
Pembimbing TIM Olimpiade Matematika MAN 1 Indramayu
mathtamurih@gmail.com

Kemampuan Dasar

1. Misalkan $f(x) = a^2x + 300$ dan $f(20) + f^{-1}(22) = f^{-1}(20) + f(22)$. Maka nilai dari $f(1)$ adalah ….

Pembahasan

Misal $y = a^2x + 300$, maka

$$y - 300 = a^2x$$
$$x = \frac{y - 300}{a^2}$$

Sehingga,

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 300}{a^2}.$$

Karena

$$f(20) + f^{-1}(22) = f^{-1}(20) + f(22)$$

Maka

$$20a^2 + 300 + \frac{22 - 300}{a^2} = \frac{20 - 300}{a^2} + 22a^2 + 300$$
$$\frac{2}{a^2} = 2a^2$$
$$1 = a^4$$
$$a = -1 \text{ atau } a = 1$$

Akibatnya, $a^2 = 1$.

Sehingga didapat $f(x) = x + 300$.
Dan nilai $f(1) = 301$.

2. Banyaknya bilangan bulat dari 1001 sampai dengan 2022 yang habis dibagi 15 atau 9 adalah ….

Pembahasan

Bilangan bulat dari 1001 sampai 2022 ada sebanyak;

$$2022 - 1001 + 1 = 1022.$$

- Banyaknya bilangan yang habis dibagi 15 ada sebanyak;

$$n(A) = \left\lfloor \frac{1022}{15} \right\rfloor = 68.$$

- Banyaknya bilangan yang habis dibagi 9 ada sebanyak;

$$n(B) = \left\lfloor \frac{1022}{9} \right\rfloor = 113.$$

- Banyaknya bilangan yang habis dibagi KPK (15 , 9) = 45 ada sebanyak;

$$n(A \cap B) = \left\lfloor \frac{1022}{45} \right\rfloor = 22.$$

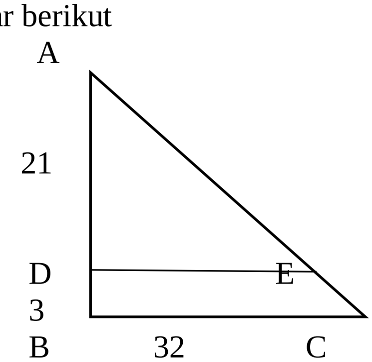
Sehingga didapat,

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 68 + 113 - 22 \\ &= 159. \end{aligned}$$

3. Diberikan segitiga *ABC* siku-siku di *B*. Titik *D* berada di *AB* dan *E* pada *AC* sehingga *DE* sejajar *BC*. Jika *AD* = 21, *BD* = 3, dan *BC* = 32, panjang *AE* adalah ….

Pembahasan

Perhatikan gambar berikut



Berdasarkan teorema Pythagoras didapat

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{24^2 + 32^2} \\ &= \sqrt{576 + 1024} \\ &= \sqrt{1600} \\ &= 40. \end{aligned}$$

Segitiga *ABC* sebangun dengan segitiga *ADE*, sehingga didapat

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\frac{AE}{40} = \frac{21}{24}$$
$$AE = \frac{21}{24} \cdot 40$$
$$AE = 35.$$

4. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) sehingga $|x| + |y| + |x + y| = 24$ adalah ….

Pembahasan

Berdasarkan sifat ketaksamaan nilai mutlak didapat

$$|x| + |y| \geq |x + y|.$$

i. Untuk $|x| + |y| = |x + y|$

$$|x| + |y| + |x + y| = 24$$
$$2|x + y| = 24$$
$$|x + y| = 12$$
$$x + y = \pm 12$$

Sehingga didapat

$(x, y) = (0,12), (0, -12), (12,0), (-12,0) \rightarrow$ ada 4
$(1,11), (-1, -11), (11,1), (-11, -1) \rightarrow$ ada 4
$(2,10), \ldots \rightarrow$ ada 4
$(3,9), \ldots \rightarrow$ ada 4
$(4,8), \ldots \rightarrow$ ada 4
$(5,7), \ldots \rightarrow$ ada 4
$(6,6), (-6, -6) \ldots \rightarrow$ ada 2

Total ada sebanyak $6 \times 4 + 2 = 26$.

ii. Untuk $|x| + |y| > |x + y|$

- Kemungkinan yang memenuhi $|x| + |y| = 13$ dan $|x + y| = 11$
  $(x, y) = (12, -1), (-1,12), (-12,1), (1, -12) \rightarrow 4$

  Dengan cara yang sama didapat kemungkinan lainnya adalah

$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	$\lvert x + y\rvert$	Banyaknya
13	11	4
14	10	4
15	9	4
16	8	4
17	7	4
18	6	4

19	5	4
20	4	4
21	3	4
22	2	4
23	1	4
24	0	2
		46

Jadi banyaknya pasangan (x, y) yang memenuhi ada sebanyak 26 + 46 = 72

5. Jika sisa pembagian $x^{2021} + x^{1011} + x^{506} + x^{253} + x^{127}$ oleh $x^2 - 1$ adalah $Ax + B$, maka tentukan nilai dari $4A + 5B$.

Pembahasan

Karena pembaginya $x^2 - 1$, maka $x^2 = 1$.

Sehingga,

$$\begin{aligned} P(x) &= x^{2021} + x^{1011} + x^{506} + x^{253} + x^{127} \\ &= (x^2)^{1010} \cdot x + (x^2)^{505} \cdot x + (x^2)^{253} + (x^2)^{126} \cdot x + (x^2)^{63} \cdot x \end{aligned}$$

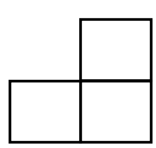
Berdasarkan teorema sisa,

$$\begin{aligned} s(x) &= (1)^{1010} \cdot x + (1)^{505} \cdot x + (1)^{253} + (1)^{126} \cdot x + (1)^{63} \cdot x \\ &= x + x + 1 + x + x \\ &= 4x + 1 = Ax + B \end{aligned}$$

Akibatnya didapat $A = 4$ dan $B = 1$.

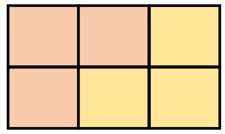
Jadi, $4A + 5B = 4 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 16 + 5 = 21$.

6. Papan catur berukuran 3×22 akan ditutupi oleh 22 buah L-tromino seperti pada gambar di bawah ini. Banyak cara penyusunan sehingga tidak ada L-tromino yang saling tumpang tindih adalah ….



Pembahasan

Perhatikan gambar berikut

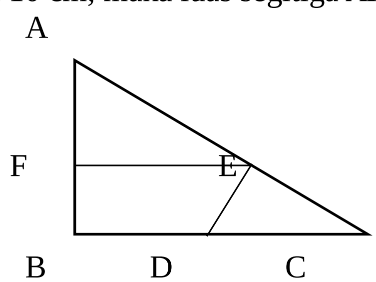


Karena kita dapat mengisi kotak 2×3 dengan menggunakan 2 buah L-tromino, sehingga terdapat 2 cara untuk mengisi petak 2×3.

Banyaknya petak 2×3 dalam papan catur berukuran 3×22 adalah sebanyak $\frac{22}{2} = 11$.
Maka banyaknya cara penutupan papan catur tersebut sebanyak

$$2^{11} = 2048.$$

7. Diberikan segitiga *ABC* seperti pada gambar, dengan *AB* = *2BC* dan *BD* = *CD*. Jika luas segitiga *DEC* adalah 10 cm, maka luas segitiga *AFE* adalah ….



Pembahasan

Misal panjang *BD* = *CD* = *x*, maka *AB* = *2BC* = *4x* maka

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(4x)^2 + (2x)^2} \\ &= \sqrt{20x^2} \\ &= 2x\sqrt{5} \end{aligned}$$

Segitiga *DEC* sebangun dengan *ABC*, maka

$$\begin{aligned} \frac{EC}{BC} &= \frac{DC}{AC} \\ EC &= \frac{DC}{AC} \cdot BC \\ &= \frac{x}{2x\sqrt{5}} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$= \frac{x\sqrt{5}}{5}$$

Dan,

$$AE = AC - CE$$
$$= 2x\sqrt{5} - \frac{x\sqrt{5}}{5}$$
$$= \frac{9x\sqrt{5}}{5}.$$

Sehingga $AE = 9EC$

$$\frac{[ABC]}{[BEC]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AB}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot FB}$$
$$= \frac{AB}{FB}$$
$$= \frac{AC}{EC}$$

$$[ABC] = \frac{AC}{EC}[BEC]$$
$$= \frac{AC}{EC} 2[DEC]$$
$$= \frac{10}{1} \cdot 2 \cdot 10$$
$$= 200.$$

Segitiga *ABC* sebangun dengan segitiga *AFE*, sehingga

$$\frac{[AFE]}{[ABC]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AF \cdot FE}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC}$$
$$= \frac{AE \cdot AE}{AC \cdot AC}$$
$$= \left(\frac{AE}{AC}\right)^2.$$

akibatnya

$$[AFE] = \left(\frac{9}{10}\right)^2 [ABC]$$
$$= 162.$$

Ovalexpert Indramayu, 081947008277

8. Untuk setiap bilangan asli *n*, misalkan *S*(*n*) adalah jumlah dari semua digit *n*. diberikan barisan (a_n), $a_1 = 5$, $a_n = \left(S(a_{n-1})\right)^2 - 1$ untuk $n \geq 2$. Tentukan sisa pembagian $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2022}$ dengan 21.

Pembahasan

Karena $a_1 = 5$ dan $a_n = \left(S(a_{n-1})\right)^2 - 1$, maka
$a_2 = \left(S(a_1)\right)^2 - 1 = 5^2 - 1 = 24$
$a_3 = \left(S(a_2)\right)^2 - 1 = 6^2 - 1 = 35$
$a_4 = \left(S(a_3)\right)^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$
$a_5 = \left(S(a_4)\right)^2 - 1 = 9^2 - 1 = 80$
$a_6 = \left(S(a_5)\right)^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$
$\vdots$
Seterusnya akan berulang antara 63 (untuk *n* genap) dan 80 (untuk *n* ganjil), sehingga didapat

$a_{2k} = 63$ dan $a_{2k+1} = 80$, untuk $k \geq 2$

Juga didapat

$$a_{2k} + a_{2k+1} = 63 + 80 = 143.$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2022} &= 5 + 24 + 35 + 1009 \times 143 + 63 \\ &= 64 + 1009 \times 143 + 63 \\ &= 1 + 1 \times (-4) + 0 \ (mod\ 21) \\ &= -3 \ (mod\ 21) \\ &= 18 \ (mod\ 21). \end{aligned}$$

Jadi, sisa pembagiannya adalah 21.

9. Diberikan bilangan real *x*, *y* dengan $x > y > 0$ sehingga

$$x + 100 \leq \sqrt{x^2 - y^2 + 200(x + y)}.$$

Nilai *y* adalah ….

Pembahasan

$$\begin{gathered} x + 100 \leq \sqrt{x^2 - y^2 + 200(x + y)} \\ x^2 + 200x + 10000 \leq x^2 - y^2 + 200(x + y) \\ y^2 - 200y + 10000 \leq 0 \\ (y - 100)^2 \leq 0 \end{gathered}$$

Karena kuadrat dari bilangan real minimal 0, maka

$$(y-100)^2=0$$

Akibatnya

$$y=100.$$

10. Tentukan nilai x sehingga x^2+20x adalah pangkat tiga dari suatu bilangan prima.

Pembahasan

$$x^2+20x=x(x+20)=p^3.$$

Sehingga pemfaktoran yang mungkin adalah

$$(x,x+20)=(1,p^3),(p,p^2),(p^2,p),(p^3,1).$$

Karena $x+20>x$ dan $x=1$ tidak memenuhi, maka

$$(x,x+20)=(p,p^2)$$

Akibatnya $x=p$ dan $p+20=p^2$

Sehingga

$$p^2-p-20=0$$
$$(p-5)(p+4)=0$$
$$p=5 \text{ atau } p=-4$$

Karena p prima, maka nilai p yang memenuhi adalah 5.

Kemampuan Lanjut

11. Di suatu ruangan terdapat 12 kursi yang disusun menjadi 3 baris. Di baris pertama, terdapat 3 kursi. Di baris kedua terdapat 4 kursi. Di baris ketiga terdapat 5 kursi. Jika kursi akan diduduki 12 siswa termasuk Aska dan Budi. Misal banyaknya cara untuk 12 siswa menempati tempat duduk jika Aska dan Budi duduk di baris pertama adalah *A*. Tentukan nilai $\frac{A}{8!}$.

Pembahasan

Cara menyusun siswa-siswanya adalah untuk baris pertama 3!, untuk baris kedua 4!, dan untuk baris ketiga 5!.

Karena Aska dan Budi di baris pertama, maka tersisa 10 siswa. Sehingga bayaknya pilihan siswa tiap barisnya adalah
Baris pertama sebanyak ${}_{10}C_1$, baris kedua sebanyak ${}_{9}C_4$ dan baris ketiga sebanyak ${}_{5}C_5$.

Akibatnya nilai dari *A* adalah

$$\begin{aligned} A &= {}_{10}C_1 \cdot 3!.\ {}_{9}C_4 \cdot 4! \cdot {}_{5}C_5 \cdot 5! \\ &= \frac{10!}{9!} \cdot \frac{9!}{5!\,4!} \cdot 1 \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \\ &= 10! \cdot 3!. \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} \frac{A}{8!} &= \frac{10!\,31}{8!} \\ &= 10 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 540. \end{aligned}$$

12. Diberikan segitiga siku-siku *ABC* dan jumlah panjang jari-jari lingkaran dalam dan luarnya adalah 8. Panjang hipotenusa segitiga *ABC* adalah ….

Pembahasan

Misal panjang sisi-sisi yang saling tegak lurusnya *a* dan *b* serta panjang hipotenusanya *c*, maka $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Karena luasnya 28, maka $28 = \frac{1}{2}ab$ sehingga $ab = 56$.

Misal $a + b = x$, maka

$$c = \sqrt{(a+b)^2 - 2ab} = \sqrt{x^2 - 112}$$

Misal jari-jari lingkaran luarnya *R* dan jari-jari lingkaran dalamnya *r*, maka

$$R=\frac{c}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2-112}}{2}.$$

Dan

$$r=\frac{L}{s}$$
$$=\frac{28}{\frac{a+b+2}{2}}$$
$$=\frac{56}{a+b+c}$$
$$=\frac{56}{x+\sqrt{x^2-112}}.$$

Sehingga

$$\begin{gathered}R+r=8\\ \frac{\sqrt{x^2-112}}{2}+\frac{56}{x+\sqrt{x^2-112}}=8\\ \frac{\sqrt{x^2-112}\left(x+\sqrt{x^2-112}\right)+112}{2\left(x+\sqrt{x^2-112}\right)}=8\\ x\sqrt{x^2-112}+x^2-112+112=16\left(x+\sqrt{x^2-112}\right)\\ x\left(x+\sqrt{x^2-112}\right)=16\left(x+\sqrt{x^2-112}\right)\\ x=16\end{gathered}$$

Akibatnya

$$c=\sqrt{16^2-112}$$
$$=\sqrt{256-112}$$
$$=\sqrt{144}$$
$$=12.$$

Jadi, panjang hipotenusanya adalah 12.

13. Jika

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+B}{3^{k+1}}=10,$$

Maka nilai B = ….

Pembahasan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+B}{3^{k+1}}=10 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

Kedua ruas kalikan 3 didapat

$$3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+B}{3^{k+1}}=30$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+B}{3^{k}}=30 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (ii)$$

Persamaan (ii) dikurangi persamaan (i) didapat

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+B}{3^{k}}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+B}{3^{k+1}}=20$$

$$\frac{2+B}{3}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2k+B}{3^{k}}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+B}{3^{k+1}}=20$$

$$\frac{2+B}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2+2k+B-2k-B}{3^{k+1}}=20$$

$$\frac{2+B}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^{k+1}}=20 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (iii)$$

Bentuk $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^{k+1}}$ merupakan barisan geometri tak hingga dengan $a=\frac{2}{9}$ dan $r=\frac{1}{3}$, sehingga

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^{k+1}}&=\frac{a}{1-r}\\&=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{3}}\\&=\frac{2}{9}\times\frac{3}{2}\\&=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Akibatnya persamaan (iii) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{2+B}{3}+\frac{1}{3}&=20\\3+B&=60\\B&=57.\end{aligned}$$

14. Diberikan tupel bilangan bulat $(w_1, w_2, \dots, w_7)$ sehingga memenuhi $w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_7 = 155$ dengan $21 \le w_1, w_2, \dots, w_7 \le 23$. Tentukan banyaknya tupel yang memenuhi.

Pembahasan

Misalkan $w_i = 21 + a_1$ untuk $0 \le a_i \le 2$ dan $1 \le i \le 7$. Maka

$$\begin{gathered} w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_7 = 155 \\ 21 \cdot 7 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 = 155 \\ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 = 8 \end{gathered}$$

Dan diperoleh $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (2,2,2,2,0,0,0), (2,2,2,1,1,0,0,), (2,2,1,1,1,1,0,0), (2,1,1,1,1,1,1,0)$ dan permutasi dari masing-masing tupel tersebut.

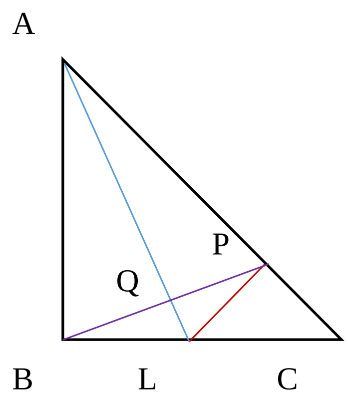
Sehingga banyaknya tupel yang memenuhi ada sebanyak

$$\begin{aligned} \frac{7!}{4!\,3!} + \frac{7!}{3!\,2!\,2!} + \frac{7!}{2!\,4!\,1!} + \frac{7!}{1!\,6!\,1!} &= 7 \cdot 5 + 7 \cdot 6 \cdot 5 + 7 \cdot 3 \cdot 5 + 7 \\ &= 35 + 210 + 105 + 7 \\ &= 357. \end{aligned}$$

15. Diberikan segitiga siku-siku sama kaki *ABC*. Jika diketahui *BC* = *AB* dan titik *L* merupakan titik tengah *BC*. Misalkan titik *P* berada di *AC* sehingga *BP* tegak lurus dengan *AL*. Jika panjang $CP = 30\sqrt{2}$, maka tentukan panjang *AB*.

Pembahasan

Perhatikan gambar berikut



Misal *BL* = *LC* = *x*, maka *AB* = *2x*.

Berdasarkan teorema Pythagoras didapat

$AL = \sqrt{(2x)^2 + x^2}$

$$= \sqrt{5x^2}$$
$$= x\sqrt{5}.$$

Segitiga *ABQ* sebangun dengan segitiga *ABL*, sehingga

$$\frac{BQ}{BL} = \frac{AB}{AL}$$
$$\frac{BQ}{x} = \frac{2x}{x\sqrt{5}}$$
$$BQ = \frac{2x}{\sqrt{5}} = \frac{2x}{5}\sqrt{5}.$$

Berdasarkan Pythagoras didapat juga

$$QL^2 = BL^2 - BQ^2$$
$$= x^2 - \left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right)^2$$
$$= x^2 - \frac{4x^2}{5}$$
$$= \frac{x^2}{5}.$$

ABC segitiga siku-siku sama kaki, sehingga $\angle BCA = 45^0$
Perhatikan segitiga *PCL*, berdasarkan aturan cosinus didapat

$$PL^2 = CL^2 + CP^2 - 2 \cdot CL \cdot CP \cdot \cos C$$
$$= x^2 + \left(30\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot 30\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$= x^2 - 60x + 1800.$$

Segitiga *ABQ* sebangun dengan segitiga *ABL*, sehingga didapat

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{AB}{AL}$$
$$AQ = \frac{AB^2}{AL}$$
$$= \frac{4x^2}{x\sqrt{5}}$$
$$= \frac{4}{5}x\sqrt{5}.$$

Selian itu,

$$AP = AC - CP$$
$$= \sqrt{AB^2 + BC^2} - CP$$

$= 2x\sqrt{2} - 30\sqrt{2}$
$= (2x - 30)\sqrt{2}.$

Berdasarkan Pythagoras didapat

$$
\begin{aligned}
PQ^2 &= AP^2 - AQ^2 \\
&= (4x^2 - 120x + 900)2 - \frac{16}{5}x^2 \\
&= 8x^2 - 240x + 1800 - \frac{16}{5}x^2 \\
&= \frac{24}{5}x^2 - 240x + 1800.
\end{aligned}
$$

Dari segitiga *PQL* dan berdasarkan Pythagoras didapat

$$
\begin{gathered}
PQ^2 + QL^2 = PL^2 \\
\frac{24}{5}x^2 - 240x + 1800 + \frac{x^2}{5} = x^2 - 60x + 1800 \\
5x^2 - 150x = 0 \\
x^2 - 30x = 0 \\
x(x - 30) = 0 \\
x = 30
\end{gathered}
$$

Jadi, panjang *AB* adalah 90.

16. Diberikan bilangan asli *m*, *n*, dengan *FPB* (*m* , *n*) = 7 dan *FPB* (*2m* , *3n*) = 42, maka *FPB* (*21m* , *14n*) adalah …

Pembahasan

Karena *FPB* (*m* , *n*) = 7, dapat dimisalkan $m = 7a_1$ dan $n = 7b_1$ dengan $FPB(a_1, b_1) = 1$.

$FPB(2m, 3n) = FPB(2 \cdot 7a_1, 3 \cdot 7b_1) = 42$, maka $a_1 = 3a_2$ dan $b_1 = 2b_2$ dangan $FPB(a_2, b_2) = 1$.

Sehingga, $m = 7 \cdot 3a_2 = 21a_2$ dan $n = 7 \cdot 2b_2 = 14b_2$.

akibatnya

$$
\begin{aligned}
FPB(21m, 14n) &= FPB(21 \cdot 21a_2, 14 \cdot 14b_2) \\
&= FPB(7^2 3^2 a_2, 2^2 7^2 b_2) \\
&= 7^2 \\
&= 49.
\end{aligned}
$$

17. Diketahui a, b, c, d bilangan real positif memenuhi $a > c, d > b$ dan $4a^2 + 4b^2 = 4c^2 + 4d^2 = 5ac + 5bd$. Nilai dari $20\left(\frac{ab+cd}{ad+bc}\right) = \cdots$.

Pembahasan

Berdasarkan kondisi pada soal, dapat dibuat segiempat yang merupakan tali bususr lingkaran misal $PQRS$ dengan $PQ = a$, $QR = b$, $PS = c$ dan $RS = d$. serta $\angle PQR = \angle PSR = 90^0$.

Akibatnya $PR = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Misal S' hasil refleksi S terhadap garis sumbu PR, dan P' hasil refleksi P terhadap garis sumbu QS'. Sehingga didapat $P'Q = PS' = SR$.

$QRSP'$ merupakan trapesium sama kaki dengan $QR \| P'S$, sehingga $QS = P'R$.

Berdasarkan Ptolemy pada $PQRS$ didapat $QS \cdot PR = ac + bd$.
Berdasarkan Ptolemy pada $PQRS'$ didapat $QS' \cdot PR = bc + ad$.
Berdasarkan Ptolemy pada $P'QRS'$ didapat $QS' \cdot P'R = ab + cd$.

Dan didapat

$$\begin{aligned} QS &= \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{\frac{4}{5}(a^2 + b^2)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{4}{5}\sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} 20\left(\frac{ab + cd}{ad + bc}\right) &= 20\,\frac{QS' \cdot P'R}{QS' \cdot PR} \\ &= 20\,\frac{P'R}{PR} \\ &= 20\,\frac{QS}{PR} \\ &= 20\,\frac{\frac{4}{5}\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= 20 \cdot \frac{4}{5} \\ &= 16. \end{aligned}$$

18. Misalkan A adalah himpunan semua bilangan 8 digit yang digit-digitnya terdiri digit 1, 2, atau 3 dan memuat paling sedikit satu digit 2. Banyaknya bilangan N di A sehingga setiap digit 2 di N diapit oleh digit 1 dan 3….

Pembahasan

- Kemungkinan 1 : banyak digit 2 ada 1, banyak kemungkinan posisi digit 2 ada 6 dan banyak kemungkinan digit-digit lainnya adalah 2^6. Sehingga banyak bilangan 8 digit yang memenuhi ada sebanyak $6 \times 2^6 = 6 \times 64 = 384$

- Kemungkinan 2 : banyak digit 2 ada 2;
  - Jika hanya satu angka diantara kedua angka 2:
    Banyaknya cara memilih kedua posisi angka 2 ada 4 cara.
    Banyaknya bilangan 8 digit yang memenuhi ada sebanyak $4 \times 2^4 = 4 \times 16 = 64$.

  - Jika ada lebih dari 1 angka diantara kedua angka 2:
    Banyaknya cara memilih kedua posisi angka 2 ada ${}_4C_2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ cara.
    Banyaknya bilangan 8 digit yang memenuhi ada sebanyak $6 \times 2^4 = 6 \times 16 = 96$.

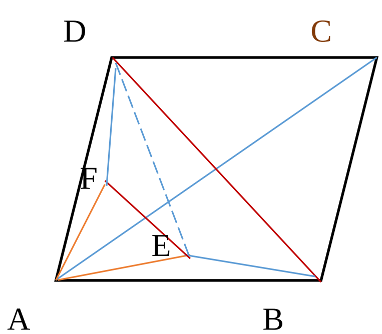
- Kemungkinan 3 : banyak digit 2 ada 3;
  - Jika hanya ada satu angka di setiap angka 2 berurutan.
    Banyaknya cara memilih ketiga posisi angka 2 ada 2 cara.
    Banyaknya bilangan 8 digit yang memenuhi ada sebanyak $2 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8$.

  - Jika ada angka 2 berurutan yang terdapat lebih dari satu bilangan diantaranya.
    Banyaknya cara memilih ketiga posisi angka 2 ada 2 cara.
    Banyaknya bilangan 8 digit yang memenuhi ada sebanyak $2 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8$.

Sehingga banyaknya bilangan 8 digit yang mungkin ada sebanyak 384 + 64 + 96 + 8 + 8 = 560.

19. Diberikan belah ketupat $ABCD$ dan E titik di dalam belah ketupat tersebut sehingga $AE = BE$. Jika $\angle BAE = 12^0$ dan $\angle DAE = 72^0$, maka $\angle CDE = \cdots$.

Pembahasan



Misal F hasil refleksi E pada AC. Sehingga AE = AF, dan $\angle EAF = 72^0 - 12^0 = 60^0$ akibatnya segitiga AEF sama sisi.

DF = BE = AE = EF. Dan karena $EF \| BD$, maka $BEFD$ trapesium sama kaki dengan BE = EF =FD.

$\angle BDE = \angle DEF = \angle FDE$, sehingga DE merupakan garis bagi $\angle BDF$.

$$\begin{aligned}\angle DBA &= 90^0 - \angle BAC \\ &= 90^0 - \frac{1}{2}(72^0 + 12^0) \\ &= 90^0 - 42^0 \\ &= 48^0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle DBE &= \angle DBA - \angle EAB \\ &= 48^0 - 12^0 \\ &= 36^0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle CDE &= \angle CDB + \angle BDE \\ &= \angle DBA + \frac{1}{2}\angle DBE \\ &= 48^0 + \frac{1}{2} \cdot 36^0 \\ &= 48^0 + 18^0 \\ &= 66^0.\end{aligned}$$

Jadi beasr sudut CDE adalah 66^0.

20. Diberikan bilangan asli x, y, z sehingga $x^2y + y^2z + z^2x - 23 = xy^2 + yz^2 + zx^2 - 25 = 3xyz$. Nilai terbesar dari $x + y + z$ adalah ….

Pembahasan

$$x^2y + y^2z + z^2x - 23 = xy^2 + yz^2 + zx^2 - 25$$
$$(xy^2 + yz^2 + zx^2) - (x^2y + y^2z + z^2x) = 25 - 23$$
$$(x - y)(y - z)(z - x) = 2$$

Dan

$$(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0.$$

Tanpa mengurangi keumuman, misal $x > y$, maka $(x - y, y - z, z - x)$ yang memenuhi hanya $(2, -1, -1)$.

Akibatnya, $y = x - 2$ dan $z = x - 1$.

Substitusi ke $x^2y + y^2z + z^2x - 23 = 3xyz$, didapat

$$x^2(x-2)+(x-2)^2(x-1)+(x-1)^2x-23=3x(x-2)(x-1)$$
$$x^3-2x^2+(x^2-4x+4)(x-1)+(x^2-2x+1)x-23=3x(x^2-3x+2)$$
$$x^3-2x^2+x^3-4x^2+4x-x^2+4x-4+x^3-2x^2+x-23=3x^3-9x^2+6x$$
$$3x^3-9x^2+9x-27=3x^3-9x^2+6x$$
$$3x=27$$
$$x=9.$$

Sehingga $y=9-2=7$ dan $z=9-1=8$

Jadi nilai $x+y+z=9+7+8=24.$